Izvodi višeg reda. Diferencijali višeg reda

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

Diferencijal drugog reda

Vidjeli smo da diferencijal funkcije $u = u(x, y)$, dvije promjenljive x i y, precizno možemo zapisati kao

$$du_{(x,y)}(dx, dy) = u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy$$

Ponovnim diferenciranjem dolazimo do diferencijala drugog reda:

$$d^2u = (u_{xx}(x, y)dx + u_{xy}dy)dx + (u_{yx}(x, y)dx + u_{yy}dy)dy$$

Ako je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, mješoviti izvodi su jednaki, pa je

$$d^2u = u_{xx}(x, y)(dx)^2 + 2u_{xy}dxdy + u_{yy}(dy)^2$$

Diferencijal višeg reda

Treći diferencijal, ili diferencijal trećeg reda, funkcije dvije promjenljive $u = u(x, y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$ je

$$d^3u = u_{xxx}(dx)^3 + 3u_{xxy}(dx)^2dy + 3u_{xyy}dx(dy)^2 + u_{yyy}(dy)^3$$

Vidimo da je diferencijal u tački ustvari polinom po priraštajima. Konstante za diferencijal proizvojnog reda dobijaju se iz Paskalovog trougla, naime za $u = u(x, y) \in C^n(\mathbb{R}^2)$ imamo da je

$$d^nu = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}} (dx)^k (dy)^{n-k}$$

Diferencijal složene funkcije

Krenimo opet od najjednostavnijeg slučaja.
Neka su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realne funkcije jedne realne promjenljive.
Obilježimo sa

$$x = g(t), \qquad y = f(x) = f(g(t)) = (f \circ g)(t).$$

Dakle $f \circ g$ je funkcija od t, pa je

$$(f \circ g)'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)g'(t) = f'(g(t))g'(t)$$

Neka je $z = f(x, y)$ funkcija dvije promljenljive x i y, gdje su $x = g(t)$, $y = h(t)$ diferencijabilne funkcije po t. Tada je i z diferencijabilna funkcija po t i važi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Koristimo i zapis:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Primjer. Neka je $z = x^2y + 3xy^4$, gdje je $x = \sin 2t$ i $y = \cos t$. Naći $\frac{dz}{dt}$ za $t = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)\end{aligned}$$

Nije neophodno zamijenjivati izraze za x i y preko t. Jednostavno provjerimo da je za $t = 0$: $x = \sin 0 = 0$ i $y = \cos 0 = 1$ pa je

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2\cos 0) + (0 + 0)(-\sin 0) = 6.$$

Neka je sada $z = f(x, y)$ diferencijabilna funkcija po x i y, gdje su $x = g(s, t)$ i $y = h(s, t)$ diferencijabilne funkcije po s i t. Tada je

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

i

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Primjer. Neka je $z = e^x \sin y$ gdje je $x = st^2$ i $y = s^2 t$. Naći $\frac{\partial z}{\partial s}$ i $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Diferencijal implicitno definisane funkcije

Neka je funkcija $y = y(x)$ implicitno definisana jednačinom

$$F(x, y) = 0.$$

Neke implicitno definisane funkcije ne mogu se izraziti eksplitno. Ipak iz implicitnog zapisa tražene funkcije možemo dobiti na primjer njen Tejlorov polinom (pa i red), ukoliko je dovoljno puta diferencijabilna. Znamo da što je većeg stepena, Tejlorov polinom bolje aproksimira funkciju u tački.

Ukoliko je funkcija F diferencijabilna u tački (x_0, y_0), diferenciranjem gornje jednacine dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

odakle izrazimo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Vidimo da, ukoliko je $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, možemo izračunati prvi izvod funkcije f u tački x_0,

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Izvode višeg reda tražimo ponovnim diferenciranjem (1).

Primjer. Naći y' ako je $x^3 + y^3 = 6xy$.

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

pa je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}.$$

Neka je sada $z = f(x,y)$ implicitno definisana sa

$$F(x,y,z) = 0.$$

Ako su F i f diferencijabilne funkcije, tada je

$$\frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

pa je

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Tejlorov polinom

Neka funkcija dvije promjeljive ima sve parcijalne izvode do reda n koji su neprekidne funkcije. **Tejlorov polinom** stepena n funkcije f u tački (x_0, y_0) jeste polinom (po h i k):

$$P_n(x_0,y_0)(h,k) := f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right) +$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0,y_0)h^{n-j}k^j$$

Zadatak. Napisati treći i četvrti član Tejlorovog olinoma.

Primjer. Napisati Tejlorov polinom funkcije $f(x, y) = x^y$ stepena tri u tački $(1, 1)$.